

特征算子谱表示与特征展开的研究

王宏禹, 邱天爽

(大连理工大学电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116024)

摘 要: 深入研究了特征算子的谱表示与特征展开。给出了特征微分方程格林函数与厄尔密特微分算子及厄尔密特积分算子的关系式, 以及厄尔密特微分算子与厄尔密特积分算子两者互逆的关系式; 给出了厄尔密特微分算子的谱表示, 指出有限区间斯-刘特征方程不能用于实现无穷维的谱表示式, 厄尔密特微分算子的谱表示比诺伊曼研究简单清楚得多, 具有优越性; 给出了厄尔密特积分算子的特征展开 (特征分解), 具有理论一般性与全面性的优点, 对文献[2]中将其用于研究特征谱表示的不正确论述进行了更正; 给出了最优特征展开中长球面波函数命名的物理与几何意义。

关键词: 格林函数; 斯-刘微分方程; 特征算子; 谱表示; 特征展开; 长球面波函数

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2020096

Study on spectral representation and eigen-expansion based on eigen-operators

WANG Hongyu, QIU Tianshuang

Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

Abstract: The spectral representation and expansion based on eigen-operators were deeply studied. The relations between Green's function of characteristic differential equation and Hermitian differential and integral operators were given. The inverse relations between Hermitian differential operator and Hermitian integral operator were also studied. The spectral representation of Hermitian differential operators was given. It was also shown that the S-L eigen-equation cannot be used to realize the spectral representations of infinite dimensions in a finite interval. The method is much simpler and clearer than that of Neumann, and has advantages. The eigen-expansion (eigen-decomposition) of the Hermitian integral operator was given, which has the advantages of theoretical generality and comprehensiveness. The incorrect discussion in Wang et al^[2] was correct that it is used to study the representation of characteristic spectrum. The physical and geometric meanings of naming for the long spherical wave function in optimal eigen-expansion were given.

Key words: Green's function, S-L differential equation, eigen-operator, spectral representation, eigen-expansion, long spherical wave function

1 引言

在信号分析与处理研究及应用中, 特征算子的谱表示与特征展开 (特征分解) 具有重要意义。特征算子谱表示过去主要在量子力学中用于研究原子谱表示, 随着量子通信技术的迅速发展, 量子信号处理理论与应用也将得到快速发展。此外, 特征

算子的特征展开可用于大数据处理。因此, 特征算子谱表示与特征展开的研究是很有意义的。近年来, 作者针对特征算子谱表示与特征展开存在的问题发表了 3 篇论文, 分别是研究特征微分方程的格林函数、特征谱表示及长球面波函数^[1-3], 虽然取得了新进展, 但仍存在一些理论不清的问题。为此, 本文又对其进行了深入研究, 得出以下结论。1) 特

收稿日期: 2019-10-24; 修回日期: 2020-03-27

通信作者: 邱天爽, qiutsh@dlut.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61671105, No.61172108, No.61139001)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.61671105, No.61172108, No.61139001)

征微分方程的格林函数 $g(x, \xi)$ 非常重要, 基于对它的研究分别给出厄尔密特微分算子谱表示与厄尔密特积分算子展开式, 并给出它们为互逆的关系式。2) 厄尔密特微分算子谱表示式是无穷维的, 它比诺伊曼研究法简单清楚, 具有优越性。但是, 斯-刘 (S-L, Sturm-Louville) 特征微分方程都是有限区间的, 不能将其用于谱表示的具体实现中。3) 厄尔密特积分算子只能用于特征展开, 不能用于谱表示, 改正了文献[2]中可用于谱表示研究的不正确论述。4) 利用矩阵理论中椭球主轴研究成果及长球面波函数^[4]二重正交性成果, 对特征积分方程的长球面波函数的数学物理意义给出了清楚的解释。

2 特征算子谱表示

2.1 特征微分方程

在信号处理中, 信号展开基函数所用的正交特殊函数均可用如式(1)所示微分算子 L 的特征微分方程 (斯-刘微分方程) ^[5-6] 得到, 如式(2)所示。

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) - q(x) \quad (1)$$

$$L\phi = \lambda\phi \quad (2)$$

其中, $p(x)$ 和 $q(x)$ 在所论区间都是连续的, 且 $p(x) > 0$; λ 为特征值, 由无穷个 λ_i 组成, 当 $q(x) > 0$ 时, λ_i 都不是负数; 与 λ_i 对应的 ϕ_i 称为特征函数, ϕ_i 是正交的; $p(x)$ 和 $q(x)$ 的所论区间为 $[a, b]$, 即

$$\int_a^b \phi_j(x) \phi_k(x) dx = 0, \quad j \neq k \quad (3)$$

将特征值按递增顺序排列, 可得到一个无限序列 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_i < \dots$, 这个序列称为特征微分方程的谱。在满足适当边界条件下, 对于 2 个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$, 式(1)所示微分算子 L 满足如式(4)所示的内积关系。

$$\langle f, Lg \rangle = \langle Lf, g \rangle \quad (4)$$

因此, 式(1)所示的微分算子 L 是厄尔密特的。

2.2 特征微分方程的格林函数

任意函数 $f(x)$ 可表示为正交的归一化特征函数 $\phi_k(x)$ 的无限展开式, 如式(5)所示。

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) \quad (5)$$

其中, c_k 为展开系数。若 $\phi_k(x)$ 是正交归一化的, 即

$$\int_a^b \phi_j(x) \phi_k(x) dx = \delta_{jk} \quad (6)$$

则由式(6)可得展开系数 c_k 为

$$c_k = \int_a^b f(x) \phi_k(x) dx \quad (7)$$

式(5)所示的 $f(x)$ 可以表示为微分算子 L 的非齐次微分方程的解, 如式(8)所示。

$$Lf(x) = u(x) \quad (8)$$

根据线性系统理论, $u(x)$ 为系统的输入, $f(x)$ 为系统的输出。根据式(2)、式(4)及式(8), 将 $g = \phi_k$ 代入式(4)中, 得

$$\int_a^b (\phi_k u - f \lambda_k \phi_k) dx = 0 \quad (9)$$

利用式(9)可得式(7)中展开系数 c_k 的表示式, 为

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b \phi_k(\xi) u(\xi) d\xi \quad (10)$$

将式(10)中 c_k 代入式(5), 可得

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\phi_k(x) \phi_k(\xi)}{\lambda_k} \right] u(\xi) d\xi = \int_a^b g(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (11)$$

其中,

$$g(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(x) \phi_k(\xi)}{\lambda_k} \quad (12)$$

由于式(11)为输入 $u(\xi)$ 与输出 $f(x)$ 的积分形式, 因此 $g(x, \xi)$ 是与时变系数微分算子 L 对应的线性时变系统的格林函数^[7-9]。当输入 $u(x) = \delta(\xi - x_0)$ 时, 得到输出 $f(x)$ 如式(13)所示。

$$f(x) = \int_a^b g(x, \xi) \delta(\xi - x_0) d\xi = g(x, x_0) \quad (13)$$

即对于线性时变系统, 格林函数 $g(x, x_0)$ 为在 x_0 处施加单位脉冲而在 x 处所得的输出 $f(x)$ 。由式(8)与式(13)可得

$$Lg(x, x_0) = \delta(x - x_0) \quad (14)$$

式(14)表明, 厄尔密特微分算子 L 是其特征微分方程格林函数 $g(x, x_0)$ 的逆算子^[10]。

2.3 特征微分算子与格林函数的关系

根据 2.2 节的研究, 厄尔密特微分算子 L 与其格林函数 $g(x, \xi)$ 的关系为 $Lg(x, \xi) = \delta(x - \xi)$, 当 $\xi = x$ 时, 有

$$Lg(x, x) = 1 \quad (15)$$

而当 $\xi \neq x$ 时, $\delta(x - \xi) = 0$, 式(15)关系不存

在。将式(6)归一化特征函数 $\phi_i(x)$ ($i=1,2,\dots$) 的 $\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \delta_{ij}$ 形式表示成离散和形式，即

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2(x) = 1, \quad \phi_i(x)\phi_j(x) = 0,$$

$$\phi_i^2(x)\phi_j^2(x) = 0, \quad \phi_i^4(x) = \phi_i^2(x)$$

根据式(15)，当 $\delta(x-\xi)$ 在 $\xi=x$ 时，得

$$L = \frac{1}{g(x,x)} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i^2(x) \quad (16)$$

式(16)就是厄尔密特微分算子 L 谱表示无穷维离散和的形式。

2.4 斯-刘问题

对于 2.1 节的斯-刘特征微分方程，需要加上边界条件进行研究，这种研究称为斯-刘问题。对 2.1 节斯-刘特征微分方程中的函数 $p(x)$ 与 $q(x)$ 做如下假设。设函数 $p(x)$ 与 $q(x)$ 及其导数在闭区间 $[a, b]$ 上均连续，当 $a < x \leq b$ 时， $p(x) > 0$ ，而 $p(a) = 0$ 。边界条件就是限制变量 x 在闭区间 $[a, b]$ 中变化，它自然就是在端点 a 和 b 规定的条件。

为了后面研究的需要，本文采用加卡斯-刘微分方程的边值情况说明，如表 1 所示。表 1 中 $\rho(x)=1$ 的情况即为通常的斯-刘微分方程，有调和微分方程、勒让德微分方程及连带勒让德微分方程。

式(16)厄尔密特微分算子 L 谱表示没有考虑上述边界值情况的研究结果，因此，不能将表 1 中闭区间研究的斯-刘问题 λ_n 与 ϕ_n 用于其具体实现。但式(16)的 L 谱表示在理论上是正确的，因此可以作为一类厄尔密特微分算子 L 的一种无穷维离散和谱表示。为了说明方便，将式(16)及归一化特征函数 $\phi_n(x)$ 描述如下。

厄尔密特算子 L 的无穷维离散和表示式为

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i^2(x)$$

归一化特征函数离散表示式为

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i^2(x) = 1, \quad \phi_i(x)\phi_j(x) = \phi_i^2(x)\phi_j^2(x) = 0$$

要将式(16)中 L 表示成积分形式，首先介绍取

表 1 加卡斯-刘微分方程边值情况

微分方程	区间	边界条件	特征值	标准正交函数系
调和微分方程 $p(x)=1, q(x)=0, \rho(x)=1$ $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$	$(0, l)$	$y(0)=0$ $y(l)=0$	$\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $n=1, 2, 3, \dots$	$\sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x$
勒让德微分方程 $p(x)=(1-x^2), q(x)=0, \rho(x)=1$ $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0$ 奇点 $x = \pm 1$	$(-1, 1)$	$y(\pm 1)$ 有界	$n(n+1)$ $n=0, 1, 2, \dots$	$\sqrt{\frac{2}{n+1/2}} P_n(x)$
连带勒让德微分方程 $p(x)=(1-x^2), q(x)=\frac{m^2}{1-x^2}, \rho(x)=1$ $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0$ 奇点 $x = \pm 1$	$(-1, 1)$	$y(\pm 1)$ 有界	$n(n+1)$ $n=0, 1, 2, \dots$	$\sqrt{\left(\frac{n+1/2}{n+m} \right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(x)$
贝塞尔微分方程 $p(r)=r, q(r)=\frac{n^2}{r}, \rho(r)=r$ $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dy}{dr} \right) + \left(k^2 r - \frac{n^2}{r} \right) y = 0$ 奇点 $r = 0$	$(0, l)$	$y(0)$ 有界 $y(kl)=0$	k_i^n $i=1, 2, 3, \dots$	$\frac{\sqrt{2r}}{l J_{n+1}(k_i^n l)} J_n(k_i^n r)$
埃尔米特微分方程 $p(x)=e^{-x^2}, q(x)=e^{-x^2}, \rho(x)=e^{-x^2}$ $\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{dy}{dx} \right) + \left(\frac{\lambda}{\alpha} e^{-x^2} - e^{-x^2} \right) y = 0$	$(-\infty, \infty)$	$y(\pm\infty)$ 与 ∞ 的有限次密同阶	$2n+1,$ $n=0, 1, 2, \dots$	$\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$

值 $\phi_i^2(x)$ 的函数, 其定义为

$$E(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 1 \\ \sum_{i=1}^n \phi_i^2(x), & \lambda_n \leq \lambda \leq \lambda_{n+1}, n=1, 2, \dots, N-1 \\ \sum_{i=1}^N \phi_i^2(x) = 1, & \lambda > \lambda_N, N \rightarrow \infty \end{cases} \quad (17)$$

式(17)中的 $E(\lambda)$ 示意如图 1 所示。

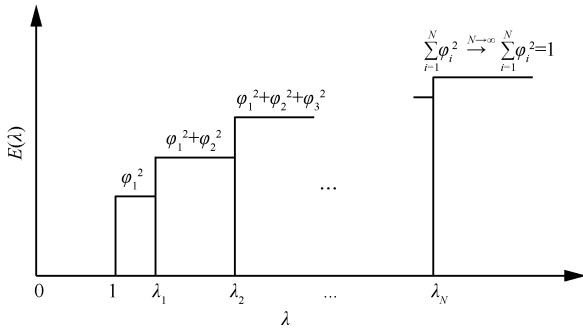


图 1 $E(\lambda)$ 示意

由式(17)可得

$$E(\lambda_{n+1}) - E(\lambda_n) = \phi_n^2(x) \quad (18)$$

当各 λ_i ($i=1, 2, \dots$) 无限接近时, 由勒贝格积分可得

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] \quad (19)$$

其中, \lim 表示趋向非常小的划分区间 $[i+1, i]$, $i=1, 2, \dots$ 。

由式(17)~式(19)可得 $\int_0^{\lambda_n} dE(\lambda) = \sum_{i=1}^n \phi_i^2(x)$,

$\int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda) = 1$, 则式(16)表示成积分形式为

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda) \quad (20)$$

上述研究结果与诺依曼的厄尔密特算子连续谱的表示式相同, 并且与之相比数学物理意义更加清晰, 具有明显的优越性。

为了进一步表明式(16)谱表示理论的正确性, 下面用 2 个正弦谱表示理论来说明。

1) 确定性非周期信号 $x(t)$ 的傅里叶积分。对 $x(t)$ 的傅里叶级数展开, $x(t)$ 必须在闭区间 $[-l, l]$ 是周期的, 但实际应用中的许多信号是非周期的, 因此需要解决这个困难问题。有学者给出了回避在 $[-l, l]$ 闭区间周期性的要求, 将 l 扩展成 $l \rightarrow \infty$ 来解决, 得出非周期傅里叶积分。

2) 平稳随机信号 $x(t)$ 的谱分解。采用随机振幅简谐振动叠加法可得平稳随机信号 $x(t)$ 的谱分解 $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{im\omega t} dZ(\omega)$, 表明 $x(t)$ 是由无限个频率由小到大连续变化的随机幅度简谐振动叠加而成的^[2]。

2.5 加权的斯-刘微分方程

通常的斯-刘微分方程因存在边界条件问题, 只能用于有限区间研究, 为此, 有学者给出了加权斯-刘微分方程来解决, 即

$$Ly + \lambda \rho(x)y = 0$$

其中, $Ly = \frac{d}{dx} p(x) \frac{dy}{dx} - q(x)y$; $\rho(x)$ 为加权函数, $\rho(x) > 0$, 在所论区间是连续的; $y(x)$ 是加权的正交函数, 即 $\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0, m \neq n$ 。

表 1 中的埃尔米特微分方程属于加权的斯-刘微分方程, 它的存在区间是 $(-\infty, \infty)$ 。因此, 可用于研究谱表示算子 $L = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i^2(x)$ 的实现。这充分表明本文研究的谱算子理论正确清晰且可实现, 具有优越性。

3 特征积分算子展开

3.1 积分算子方程与特征积分方程

在数学中, 积分算子方程 K 定义为

$$Ku = \int_a^b K(x, \xi)u(\xi)d\xi \quad (21)$$

其中, $K(x, \xi)$ 为核函数。若 $K(x, \xi)$ 选择如式(12)所示的特征微分方程的格林函数 $g(x, \xi)$, 则

$$K(x, \xi) = g(x, \xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(\xi)}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi_i(x)\phi_i(\xi),$$

$$\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}, \text{ 此外, 还应考虑 } \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\phi_i(\xi) = \delta(x - \xi).$$

当输入 $u_i(\xi) = \phi_i(\xi)$ 时, 由式(21)得

$$\int_a^b K(x, \xi)\phi_i(\xi)d\xi = \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(\xi)}{\lambda_i} \phi_i(\xi)d\xi = \int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi_i(x)\phi_i^2(\xi)d\xi = \mu_i \phi_i(x) \quad (22)$$

式(22)就是特征积分方程, 该特征积分方程具有以下性质。

1) 特征积分方程核函数 $K(x, \xi) = g(x, \xi)$ 是厄尔密特的。

2) 特征函数 $\phi_i(x)$ 是正交归一化的, 即

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx = \delta_{ij}。$$

3) 特征值 μ_i 是实数, 并满足 $1 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ 。

这是因为 $\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}$, 其中, λ_i 是递增序。

当积分算子 K 方程的核函数 $K(x, \xi) = g(x, \xi)$ 与输入 $u = \delta(x - \xi)$ 时, 得

$$K\delta(x - \xi) = \int_a^b g(x, \xi)\delta(x - \xi)d\xi = g(x, x) \quad (23)$$

由于 $x \neq \xi$ 时, $\delta(x - \xi) = 0$, 因此, 当 $x = \xi$ 时, 可将 $\delta(x - \xi)$ 视为 1。实际上, 当 $x = \xi$ 时, $\delta(x - \xi) = \infty$, 而 $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$, 于是, 积分算子 K 为

$$K = g(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi_i^2(x) \quad (24)$$

积分算子 K 中特征值 μ_i 是递减序, 不能用于研究特征值递增序的厄尔密特微分算子 L 谱表示, 而只能用于积分算子特征分解或特征展开的研究。

3.2 椭圆的主轴

要对信号的特征算子分解的物理与几何意义有清楚的了解, 有必要介绍数学矩阵特征理论中椭圆的主轴。

n 维球心位于原点的椭圆方程为

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i < j} a_{ij}x_i x_j = 1 \quad (25)$$

若 $i > j$, $a_{ij} = a_{ji}$, 令矩阵 $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$,

A 是对称矩阵, 则式(25)可表示为

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \langle Ax, x \rangle = 1 \quad (26)$$

其中, 矢量 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为内积表示。注意, A 与 x 均是实数。

椭圆的主轴是从原点起始并垂直于球上点 x 的矢量, 对 $n=2$ 即椭圆情况, 如图 2 所示, 它有 2 个独立的主轴, 且它们是相互正交的。

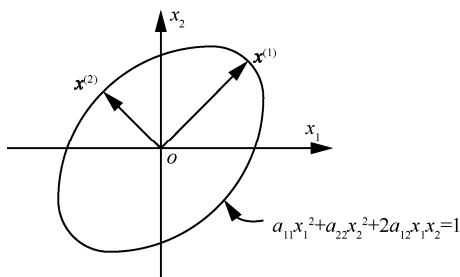


图 2 椭圆示意

当 $n=2$ 时, 椭圆的主轴情况可推广成 $n>2$ 时的一般情况。椭圆的主轴有一重要性质, 即它们是实对称矩阵 A 的特征矢量, 对此研究描述如下。

若 n 维曲面 $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$, C 为常数, 则有

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (27)$$

由式(27)可知, 梯度矢量 $\mathbf{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$ 与点 x 附

近的微分矢量 $dx = (dx_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ 是正交的。因此, 它在点 x 处是与 $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$ 的曲面正交的。现令 $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ 为二次型, 椭圆方程

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \langle Ax, x \rangle = 1 \text{ 与 } \Phi = 1 \text{ 的正交矢量 } \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) \text{ 为}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) = \left(\sum_i \sum_j a_{ij} \frac{\partial (x_i x_j)}{\partial x_k} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

而

$$\frac{\partial (x_i x_j)}{\partial x_k} = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk} \quad (29)$$

将式(29)代入式(28), 并考虑 $a_{ik} = a_{ki}$, 有

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) = \left(2 \sum_j a_{kj} x_j \right) = 2Ax \quad (30)$$

式(30)是与椭圆 $\Phi = 1$ 在点 x 正交的矢量, 若 x 是椭圆的主轴, 则其也是在该点的正交矢量。因此, 它们之间的关系为

$$Ax = \mu x \quad (31)$$

其中, μ 为实数。式(31)为矩阵 A 的特征方程, x 为其一个特征矢量。由此证明了椭圆的主轴 x 是矩阵 A 的一个特征矢量。式 (31) 有内积关系 $\langle \mu x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = 1$, 而 $\langle \mu x, x \rangle = \mu \|x\|^2 = 1$, 因此, 椭圆主轴长度是 μ , 主轴坐标位置是 $\|x\|^2$ 。由于 $\|x\|$ 必须是正数, 因此特征值 μ 也必须是正数。

上述研究的是 n 维实对称特征矩阵—主轴情况, 可以将其推广成无穷维实对称核函数特征积分方程情况, 从而可以得出它们的各特征值与一个无穷维椭圆的各主轴相对应。

3.3 长球面波函数

1) 信号分析与处理中的不确定性原理简介

信号分析与处理中的不确定性原理是信号的时宽 D 与频带宽 B 不能同时小于一最小值 C_{\min} , 即 $BD \geq C_{\min}$ 。另外, 为了有效利用信号, 其时宽与

频带宽不能同时是无限的。这样，需要解决信号频带 Ω 限于 $|\omega| \leq \Omega$ 与时间限于 $|t| \leq \frac{\tau}{2}$ 信号是什么的问题，这就是所需要研究的长球面波函数信号。

2) 长球面波函数特征积分方程表示式

对于 σ -BL (σ 带宽信号表示) 信号 $\phi(t)$ 用带通 $\Omega \geq \sigma$ 的理想滤波器 $K(t, x)$ 进行无失真滤波，并用 $|t| \leq \frac{\tau}{2}$ 时 $\rho_r(t) = 1$ 与 $|t| > \frac{\tau}{2}$ 时 $\rho_r(t) = 0$ 的矩形波时间函数进行时间范围截取，这种情况可表示为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_r K(t-x)\phi(x)dx = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} K(t-x)\phi(x)dx = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{\sin \Omega(t-x)}{\pi(t-x)} \phi(x)dx \quad (32)$$

根据特征积分方程理论，核函数 $K(t, x)$ 的作用是改变原来特征函数 $\phi(x)$ 的“长度”，而“长度”是用特征值 μ 表述的。这样，可将式(32)表示为

$$\mu_n \phi_n(t) = \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} \frac{\sin \Omega(t-x)}{\pi(t-x)} \phi_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (33)$$

式(33)就是长球面波函数的特征积分方程表示式。

3) 长球面波函数特征积分方程的性质

① 积分方程中特征值 μ_n 不是任意的，只是对某些特定值该积分方程才有解， μ_n 是正实数，并且是递减序的，有

$$1 > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n > \dots \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

② 对每一个 μ_n ，对应的特征函数 $\phi_n(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 区间内构成实正交归一化函数集，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (34)$$

其中， $m, n = 1, 2, \dots$ 。

③ 任意一个带限函数 (σ -BL) 信号 $f(t)$ 都可展成 $\phi_n(t)$ 的级数形式，即

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t), \quad |t| < \infty \quad (35)$$

其中，

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi_n(t)dt \quad (36)$$

上述 3 个性质是一般特征积分方程都具有的，对于长球面波函数特征积分方程，还有一重要的双重正交性质，即它在 $\left[-\frac{\tau_n}{2}, \frac{\tau_n}{2}\right]$ 也是正交的，有

$$\int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} \mu_n, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (37)$$

其中， $m, n = 1, 2, \dots$ 。

式(37)证明如下。对式(33)两端乘以 $\phi_m(t)$ ，从 $-\infty$ 到 ∞ 积分，则式(33)左端有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu_n \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} \mu_n, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (38)$$

其中， $m, n = 1, 2, \dots$ 。而式(33)右端改变积分先后顺序后，有

$$\int_{-\frac{\sigma_n}{2}}^{\frac{\sigma_n}{2}} \phi_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega(t-x)}{\pi(t-x)} \phi_m(t)dt dx = \int_{-\frac{\sigma_n}{2}}^{\frac{\sigma_n}{2}} \phi_m(x)\phi_n(x)dx \quad (39)$$

于是，由式(38)与式(39)可得

$$\int_{-\frac{\sigma_n}{2}}^{\frac{\sigma_n}{2}} \phi_m(t)\phi_n(t)dt = \begin{cases} \mu_n, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

即为证明的式(33)。

4) 长球面波函数物理与几何意义

根据长球面波函数的双重正交性质，由式(33)可得

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{-\frac{\sigma_i}{2}}^{\frac{\sigma_i}{2}} \phi_i^2(t)dt \quad (40)$$

式(40)中等号右边的离散和表示式可表示为特征函数 $\phi_i(t)$ 归一集的表示式，即

$$\sum_{i=1}^N \int_{-\frac{\sigma_i}{2}}^{\frac{\sigma_i}{2}} \phi_i^2(t)dt = \int_{-\tau}^{\tau} \phi_i^2(t)dt = 1 \quad (41)$$

其中， $\tau = \sum_{i=1}^N \tau_i$ ， $N \rightarrow \infty$ ， $\tau \rightarrow \infty$ 。应注意 τ_i 受限于信号不确定原理。

根据信号正交投影几何理论，式(40)与式(41)可表示为

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi_i^2(t) = 1 \quad (42)$$

如图 2 所示， $\phi_i^2(t)$ 为各投影几何坐标轴， μ_i 为对应于各投影坐标轴 $\phi_i^2(t)$ 的长度，而 $\int_{-\frac{\sigma_i}{2}}^{\frac{\sigma_i}{2}} \phi_i^2(t)dt$ 为相应坐标轴上的坐标位置。

根据 3.2 节可知，式(42)可用来说明椭球主轴理论的几何与物理意义。显然， μ_i 是椭球 $\phi_i^2(t)$ 上的长度，而 $\int_{-\frac{\sigma_i}{2}}^{\frac{\sigma_i}{2}} \phi_i^2(t)dt$ 是 μ_i 在 $\phi_i^2(t)$ 坐标上的坐标位置。

为了方便和清楚地表示，给出 $i=1,2$ 椭圆情况时的示意如图3所示，椭圆的最长主轴为最大特征值。

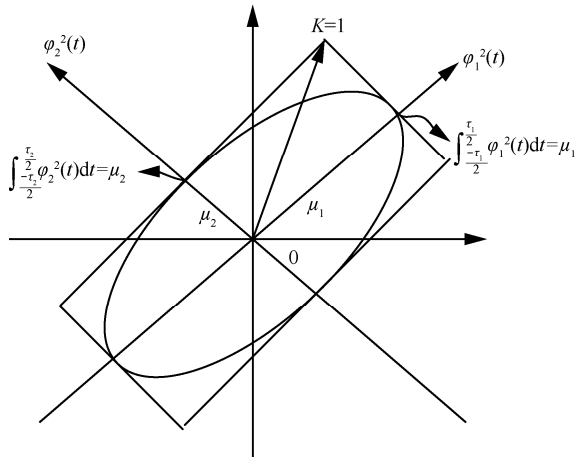


图3 长球面波函数对应的椭圆情况示意

4 分析与讨论

4.1 特征微分算子与谱表示

特征微分方程的格林函数 $g(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{\lambda_n}$ 在本文研究中有重要意义。当线性时变系统输入为 $\delta(x - \xi)$ 时， $g(x, \xi)$ 为输出，与特征微分算子 L 的关系为

$$Lg(x, \xi) = \delta(x - \xi)$$

当 $x = \xi$ 时，有 $Lg(x, x) = 1$ ， $g(x, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n^2(x)}{\lambda_n}$ ，

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n^2(x)。$$

1) $L = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n^2(x)$ ， $1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ 。根据特征值 λ_n ($n=1, 2, \dots$) 的递增序，其在数学上可作为一种厄尔密特算子 L 的无穷维离散和的谱表示。

2) $L = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n^2(x)$ 不适用于有限区间斯-刘特征微分方程，因为它存在边值问题，其 λ_n 对应的 ϕ_n 不能满足谱表示的要求，加权的斯-刘微分方程中埃尔米特微分方程存在区间为 $(-\infty, \infty)$ ，它可用于特征谱表示，从而解决了原来的困难问题。

3) 采用归一化特征函数 $\phi_n^2(x)$ 的 $E(\lambda)$ 函数，可得出无限离散和形式的 $L = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n^2(x)$ 与诺依曼研究结果相同的积分形式的连续谱表示式。

4.2 厄尔密特积分因子与特征展开

对于特征积分方程，当其核函数 $K(x, \xi)$ 选择为特征微分方程的格林函数时，即 $K(x, \xi) = g(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \phi_n(x)\phi_n(\xi)$ ，特征值 $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$ ，得特征积分方程为

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x, \xi)\phi_n(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \phi_n(x)\phi_n(\xi)\phi_n(\xi) d\xi = \mu_n \phi_n(x)$$

对特征积分算子方程，若输入为 $\delta(x - \xi)$ ，有

$$K\delta(x - \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \phi_n(x)\phi_n(\xi)\delta(x - \xi) d\xi =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x, \xi)\delta(x - \xi) d\xi \tag{43}$$

当 $x = \xi$ 时， $\delta(x - \xi) = 1$ ，由式(43)得

$$K\delta(x - \xi) = K = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \phi_n^2(x) = g(x, x)$$

其中， $1 > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n > \dots$ 为递减序，于是，厄尔密特积分算子 K 可用于特征展开或特征分解，而不能用于研究特征谱表示。

4.3 L 与 K 的关系

特征积分算子方程的核函数 $K(x, \xi)$ 为微分算子 $Lg(x, \xi) = \delta(x - \xi)$ 时的格林函数，因此，当 $x = \xi$ 时，得 L 与 K 的关系为

$$LK = 1$$

其中，有

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n^2(x), \quad 1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$$

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \phi_n^2(x), \quad 1 > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n \rightarrow 0$$

由此可得如下结论。

1) λ_n 与 μ_n ($n=1, 2, \dots$) 的关系为 $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$ ，

$LK = 1$ 表明 L 与 K 互为逆算子关系，即 $K = \frac{1}{L}$ 。

2) L 与 K 的特征值序列可构成如下的一个联合排序

$$\dots < \mu_n < \dots < \mu_2 < \mu_1 < 1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

μ_n 与 λ_n ($n=1, 2, \dots$) 序列分界点在 1 处。

3) 现由 $g(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi_i^2(x)$ 的关系来说明

$K = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi_i^2(x)$ 的物理意义。 $g(x, x)$ 为 $\delta(x - \xi)$ 通过时变线性系统传递函数为 $g(x, \xi)$ 的输出，若线性系统

是理想的, 输出应该是无能量损失的, 其归一化无能量损失的表示为 $g(x, x) = 1$, 而此种情况 K 的表示应

该为 $K = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \phi_i^2(x) = 1$ 。若线性系统不是理想的, 而是有能量损失的, 则 K 应小于归一化能量 1。

4.4 椭球主轴与长球面波函数

1) 对于特征积分算子 $K = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \phi_n^2(x) = 1$, 利用数学特征矩阵研究中的椭球主轴理论, 算子 K 中 $\phi_n^2(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 表示椭球主轴的坐标轴, μ_n ($n=1, 2, \dots$) 表示在该主轴上的长度。

2) 长球面波函数在一般数学文献中很少见到其研究成果, 但在信号分析与处理文献中却有不少研究成果, 因为它是由研究信号最优波形设计得出的, 并应用于信号展开、最佳窗函数设计等中, 至今仍存在理论不清之处, 从而影响对其函数名称的清楚理解。本文根据长球面波函数特征积分方程中双重正交性质, 即 $\int_{\frac{\sigma_n}{2}}^{\frac{\sigma_n}{2}} \phi_n^2(x) dx = \mu_n$, $n=1, 2, \dots$, 将其补充到上述椭球主轴研究中, 可以得出长球面波函数 $\phi_n(x)$ 几何与物理意义如下, 几何示意如图 3 所示。

① 特征算子 K 中 $\phi_n^2(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 是椭球坐标系中的坐标轴。

② 特征值 μ_n 是与其对应坐标轴 $\phi_n^2(x)$ 上的椭球主轴长度, 最大特征值为椭球最长主轴。

③ μ_n 所在坐标轴上的坐标值 (坐标位置) 为

$$\mu_n = \int_{\frac{\sigma_n}{2}}^{\frac{\sigma_n}{2}} \phi_n^2(x) dx。$$

5 结束语

针对特征算子谱表示与特征展开研究中尚存在的理论不清问题, 本文进行了深入研究, 得到一些有意义的理论结果。本文首先给出了特征微分方程格林函数与厄尔密特微分算子及厄尔密特积分算子的关系式, 表明了厄尔密特微分算子与厄尔密特积分算子的互逆关系, 并给出了厄尔密特微分算子的谱表示, 指出了有限区间斯-刘特征方程不能用于无穷维谱表示的原因; 然后给出了厄尔密特积分算子的特征展开, 具有理论上一般性意义, 并对特征积分方程的长球面波函数的数学物理意义给出了清楚解释。本文的研究结果对于进一步深化关于特征算子谱表示与特征展开理论研究具有重要意义。

参考文献:

- [1] 王宏禹, 邱天爽. 微分方程格林函数法的研究[J]. 信号处理, 2015, 31(4): 379-385.
WANG H Y, QIU T S. Study on the differential equation using the Green's function [J]. Signal Processing, 2015, 31(4): 379-385.
- [2] 王宏禹, 邱天爽. 信号特征谱表示与平稳随机信号谱分解统一的研究[J]. 通信学报, 2018, 39(12): 1-9.
WANG H Y, QIU T S. Unified study on characteristic spectrum representation of signals and spectral decomposition for stationary random signals[J]. Journal on Communications, 2018, 39(12): 1-9.
- [3] 王宏禹, 邱天爽. 零阶角长球面波函数与长球面波函数的研究[J]. 信号处理, 2013, 29(7): 790-799.
WANG H Y, QIU T S. Zero-order angular prolate spheroidal wave and prolate spheroidal wave functions[J]. Signal Processing, 2013, 29(7): 790-799.
- [4] STEIN S. Addition theorems for spherical wave functions[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1961, 19(1): 15-24.
- [5] MUKHTAROV O S, KADAKAL M, MUHTAROV F Ş. Eigenvalues and normalized eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problem with transmission conditions[J]. Reports on Mathematical Physics, 2004, 54(1): 41-56.
- [6] 王宏禹. 信号处理相关理论综合与统一法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
WANG H Y. Synthesis and unification method in correlation theory of signal processing [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2005.
- [7] ECONOMOU E N. Green's functions in quantum physics[M]. New York: Springer, 1983.
- [8] 王宏禹, 邱天爽. 非平稳确定性信号与非平稳随机信号统一分类法的探讨[J]. 通信学报, 2015, 36(2): 1-10.
WANG H Y, QIU T S. Unified classification methods for determinate nonstationary signals and random nonstationary signals[J]. Journal on Communications, 2015, 36(2): 1-10.
- [9] BADER R F W, GATTI C. A Green's function for the density[J]. Chemical Physics Letters, 1998, 287(3-4): 233-238.
- [10] 王宏禹, 邱天爽. 确定性信号与平稳随机信号分解的统一研究[J]. 通信学报, 2016, 37(10): 1-8.
WANG H Y, QIU T S. Unified study on the decomposition for deterministic signals and stationary random signals[J]. Journal on Communications, 2016, 37(10): 1-8.

[作者简介]



王宏禹 (1929-), 男, 北京人, 大连理工大学教授、博士生导师, 主要研究方向为随机与时变信号处理。



邱天爽 (1954-), 男, 江苏海门人, 博士, 大连理工大学教授、博士生导师, 主要研究方向为射频与医学信号处理。